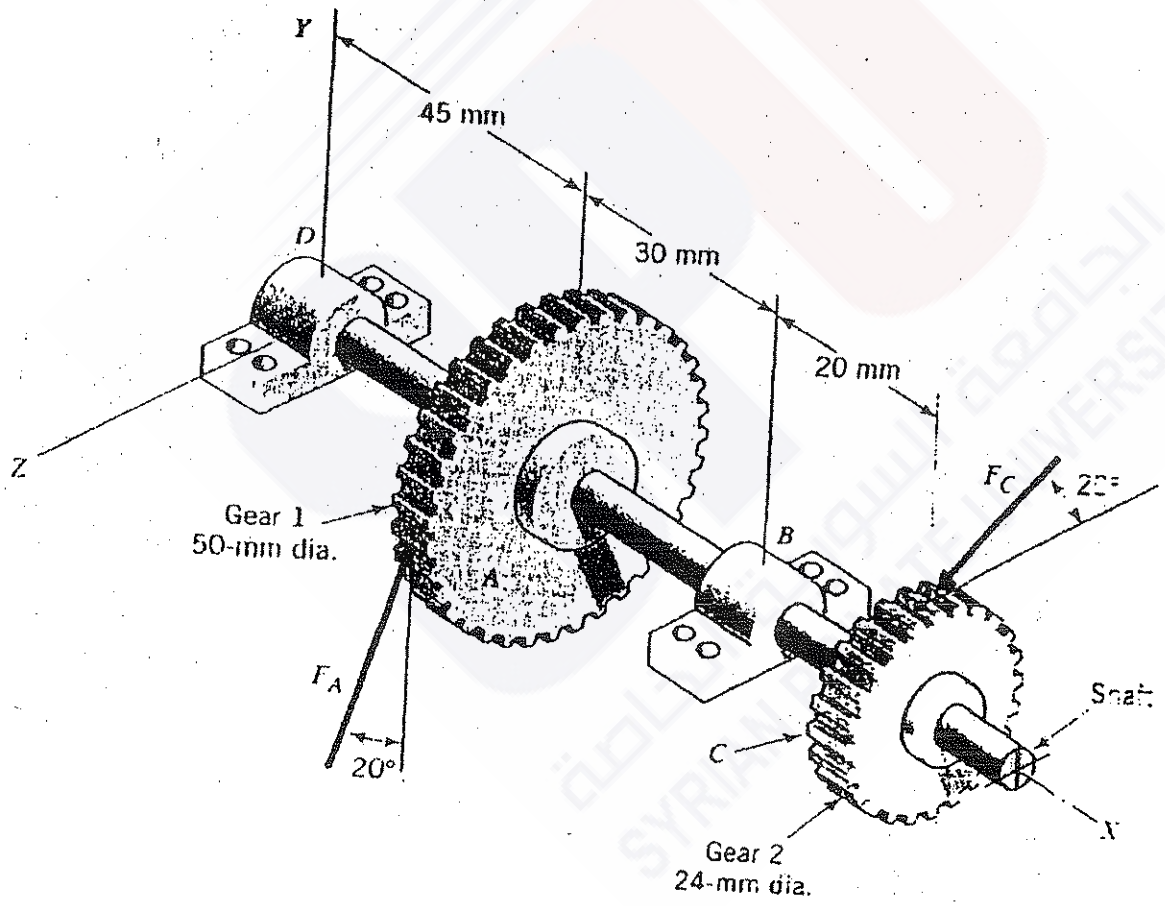
الفصل الثالث

الأعمدة



يعتـــبر تصميم العمود الخطوة الأساسية والهامة في تصميم الآلة فهو الذي يتلقى الاستطاعة ويوزعها على الأجزاء المختلفة للآلة عن طريق العناصر الميكانيكية المركـــبة عليه كالمسننات والبكرات والجنازير والمحامل والخوابير.. لذا فإن الخطأ في تصـــميمه سينعكس سلباً على كافة أجزاء الآلة وبالتالي سنحتاج إلى إعادة تصميم كافـــة أجزاء الآلة في حين أن الخطأ في تصميم أي عنصر آخر سينعكس فقط على العنصـــر وما يليه ويرتبط فيه. لذا فإن تصميم العمود بشكل صحيح هو الأساس للتصميم الناجح.

العمـــود Shaft هو القضيب الدائري المقطع غالباً الذي ينقل الاستطاعة، حيـــث يتلقى هذا العمود الاستطاعة الناتجة عن القوة المماسية المؤثرة عليه ويوزعها بـــدوره على عناصر الآلات المختلفة الناقلة للحركة كالمسننات Gears والبكرات Pulleys والحدافات Flywheels والمرافق Cranks ومسننات الجنازير Sprockets وغيرها.

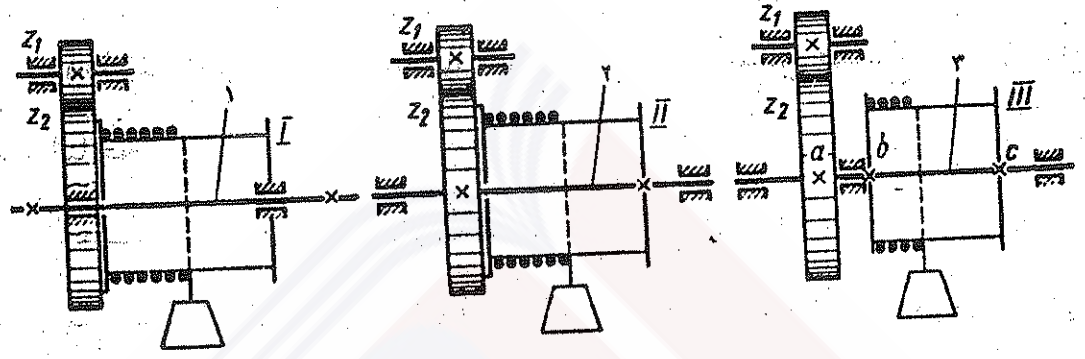
يرتكز العمود على المحامل Bearing ويتعرض لحمولات الانعطاف والشد والانعطـــاف والالتواء وتكون هذه الحمولات منفردة أو مشتركة. وعندما تشترك أنـــواع الحمولات مع بعضها فإن المصمم يجب أن يأخذ كلاً من المقاومة الساكنة ومقاومـــة التعـــب بعـــين الاعتبار فقد يكون العمود معرضاً للإجهادات الساكنة والمتكررة في وقت واحد تقريباً.

ما هو الفرق بين العمود والمحور:

المحـــاور تقوم فقط بدعم الأجزاء الدوارة أي المساعدة على دورانها ويمكن أن تكـــون ثابتة بالنسبة للأجزاء المركبة عليها أو أن تكون دوارة بدورها (في هذه الحالـــة يمكن للمحور أن يكون مصنوعاً كقطعة واحدة مع الأجزاء الدوارة). وفي كلتا الحالتين فإن المحاور تعمل فقط على إجهاد الانحناء.

أمـــا الأعمـــدة فتختلف عن المحاور بكونها لا تساعد على دوران الأجزاء الدوارة فحسب، بل أنها تنقل كذلك عزوم الالتواء على طولها كله أو في قطاعات معينة منها.

مثال: الشكل (1-3) يبين بكرة آلية لرفع الحمل في المرفاع :



الشكل (1-3)

الحالة (I): تركب البكرة على محور ثابت وتدار بواسطة زوج من المسننات z_1، z_2 حيث يكون المسنن (z_2) مثبتاً على البكرة، وينقل الحمل إلى المحور في مواضع ارتكاز البكرة عليه. المحور يتعرض إلى انحناء.

الحالـــة (II): يكون المحور دواراً ومتصلاً مع المسنن (z_2) ويتعرض إلى انحناء (انحناء دوراني).

الحالـــة (III): تكون البكرة مثبتة على العمود، أما عزم الالتواء المنقول من خلال العجلة المسننة (z_2) فيتلقاه العمود بالكامل في قطاعه (ab) وينقله إلى البكرة من خلال الخابورين المثبتين على العمود.

يجـــب وضع البكرات والمسننات قرب المساند قدر الإمكان وذلك لتقليل عزوم الانحناء (الانعطاف) وبالتالي من الانحراف ومن إجهادات الانحناء.

يمكـــن تصـــنيف أعمـــدة الإدارة Classification of shafting بالنسبة للأغراض المعدة لها إلى:

١-أعمدة الآلة Machine shafting: وتعتبر هذه الأعمدة الرئيسية المحركة في الآلة مثل أعمدة المولدات والمحركات والتوربينات وأعمدة الآلات الأخرى.

٢-أعمدة نقل الاستطاعة Power transmission shafts: وتعد منها الأعمدة الرئيسية المناولة Line shafts ثم أعمدة الإدارة الجماعية المتوسطة Jackshafts والأعمدة المناولة الوسيطة Counter shafts.

مواصفات الأعمدة Specification of shafts :

تصنع الأعمدة عادة من الفولاذ اللين Mild steel المحتوى على 0.15% كربون، وقد تصنع كذلك من الفولاذ السبائكي Alloy steel مثل فولاذ الفناديوم Vandium steel (عند ضرورة المتانة والمطيلية وخفة الوزن وصغر الحجم) أو فولاذ النيكل Nickel-steel.. إلخ.

تصنع الأعمدة غالباً بطريقة الدرفلة على الساخن Hot rolling أو بالحدادة من ثم الخراطة والجلخ للحصول على المواصفات القياسية Standard.

تصدر دائماً الشركات العالمية المنتجة للأعمدة جداول بمواصفات الأعمدة بما فيها أقطارها، أطوالها، معادنها، أوزانها... إلخ. والجدول (22) يعطي خواص الأعمدة الفولاذية المستديرة.

تصميم الأعمدة Design of shafting :

نظراً لكون العمود أهم أجزاء الآلة فإن مسألة تصميمه تعتبر رئيسية في التصميم، لذا يجب أن يصمم العمود بحيث يتحمل جميع الإجهادات المعرض لها مهما كان نوعها، كذلك الأخذ بعين الاعتبار بعض العوامل المختلفة ذات العلاقة المتبادلة مثل: المواد المصنوع منها العمود، المعالجة الحرارية، متانة العمود وفق متطلبات الاستطاعة المنقولة ومتطلبات التحميل، أداء المحامل Bearing وتوزيعها، الأوزان المؤثرة وتركيز الإجهادات Stress concentration .. إلخ.

يمكن أن يصمم العمود على أساس المتانة Strength أو على أساس من المتانة والجسوء Rigidity.

إن تصميم العمود على أساس المتانة يجب أن يأخذ بعين الاعتبار نوع التحميل ونقاط تركز الإجهادات (كمجاري الخوابير) وكذلك التحميل المتحد كالالتواء والانحناء... أما تصميم العمود على أساس المتانة والجسوء فيعني كل ما ذكر سابقاً مع مراعاة جسوء العمود عند تصميمه حيث أن كل من الجسوء الالتوائي (مثل تحديد زاوية الالتواء للعمود للحصول على حركات دقيقة كما في عمود الكامات Cam shaft) والجسوء الجانبي (مثل تحديد الانحراف الجانبي كما في المحافظة على خلوص الحامل أو محاذاة أسنان المسننات)، لها أهميتها على اهتزاز الأعمدة.

I- تصميم أبعاد العمود على أساس المتانة:

Design of shaft sizes on the basis of strength:

لتسهيل العمل فإننا نعتبر الحالات التالية:

١- الالتواء Torsion.

٢- الانحناء Bending.

٣- الالتواء المصحوب بانحناء Torsion combind with bending.

٤- الالتواء المصحوب بشد أو ضغط محوري والحالة العامة (المعادلة الاصطلاحية الأمريكية).

Torsion combined with axial tension or compression

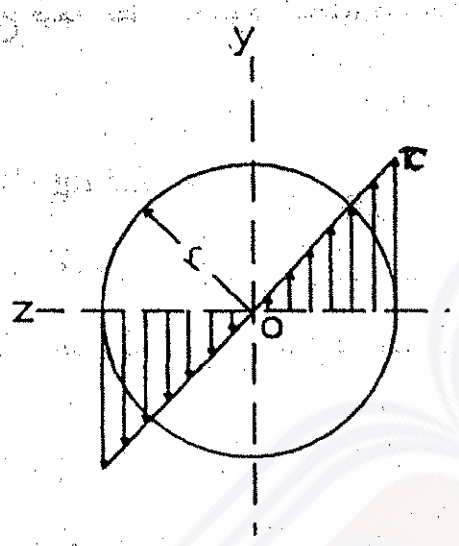
١- الالتواء Torsion:

نعتبر في هذه الحالة أن عزم الانحناء صغير بالمقارنة بعزم الالتواء، فإما أن نهمل الانحناء كلياً أو ندخله بصورة غير مباشرة على التصميم (وذلك باختيار إجهاد تصميم أقل مما لو كان التصميم معتمداً فقط على عزم الالتواء).

إن إجهاد القص يزداد بشكل نصف قطري حيث يبلغ أقصاه عند السطح

الخارجي للعمود وينعدم عند محور العمود، كما بالشكل (2-3) حيث إن

$$\tau = \gamma . G \frac{R}{L} \qquad (3\text{-}2)$$



الشكل (2-3)

حيث:

γ: انفعال القص

G: معـــامل المرونة للقص (وهو النسبة بـــين إجهاد وانفعال القص داخل حد المرونة)

τ: إجهاد القص عند الألياف الخارجية للعمود

R: نصف قطر العمود.

L: طول العمود.

أي إن إجهـــاد القص يتناسب طرداً مع (R) فينعدم عند المحور ويبلغ نهايته العظمى عند سطح العمود. والعلاقة بين عزم الالتواء (M_t) و (τ) تعطى بالعلاقة:

$$M_t = \tau . \frac{\pi . d^3}{16} = \tau . Z_p \qquad (2\text{-}3)$$

حيث :

Z_p : معامل المقطع القطبي وتعطى من الجدول رقم (4).

لحل هذه المعادلة طريقتان:

١-نختـــار العمود ونحدد إجهاد القص المسموح به من الجدول رقم (1) والجدول رقـــم (9)، وذلك باعتبار الحمل متغيراً بصورة عامة (معامل الأمن يؤخذ بحدود 8 وتزداد القيمة إذا اعتبر الحمل حمل خبطة)، ونجد قيمة (M_t) من إحدى العلاقتين :

$$M_t = P_t . R \qquad (a\text{-}3\text{-}3)$$

$$M_t = \frac{71620HP}{N} \qquad (b\text{-}3\text{-}3)$$

٢-نضـــع قيمة قطر العمود المختارة ونقارن الإجهاد الناتج بالإجهادات المسموح بها.

٢- الانحناء Bending :

إن العضو الذي يتعرض إلى عزم انحناء بصورة رئيسية هو المحور Axle. إن أكبر إجهاد انحناء يتعرض له عمود مصمت (محور) قطره (d) يعطى بالعلاقة:

$$\sigma_b = \frac{32.M_b}{\pi.d^3} \le [\sigma_t] \qquad (4\text{-}3)$$

٣- الالتواء المصحوب بانحناء Torsion combind with bending :

تحمـــل الأعمـــدة الدوارة غالباً (كما ذكرنا سابقاً) بعناصر ناقلة للحركة (كالمســـننات والحدافات...) تسبب انحناء العمود بالإضافة إلى التوائه بسبب وزنها والقـــوى الأخـــرى. يجب أن يصمم العمود بحيث يتحمل الإجهادات الناشئة عن الالتواء والانحناء بأمان.

يعتمد التصميم المتعلق بالمتانة للأعمدة المصنوعة من المواد المطيلة Ductile metal عـــلى نظـــرية أكبر إجهاد قص Maximum shear stress theory، كما يعـــتمد تصميم الأعمدة المصنوعة من المواد القصفة Britle metal على نظرية أكبر إجهاد متعامد Maximum normal stress theory.

العلاقات التالية تتعلق بالأعمدة المصنوعة من المواد المطيلة والدائرية المقطع:

$$\tau = M_t \frac{y}{I_p} = M_t \frac{16}{\pi.d^3} \le [\tau] \qquad (5\text{-}3)$$

حيث :

d: قطر العمود. M_t : عزم الالتواء.

$[\tau]$: إجهاد القص المسموح به.

أي أن أكبر إجهاد قص يجب ألا يزيد عن إجهاد القص المسموح به.

يمكن إيجاد أكبر إجهاد قص متحد في العمود وفق تطبيق عزوم الالتواء والانحناء باستخدام معادلة الإجهاد المتحد:

$$\tau_{max} = \sqrt{\tau^2 + (\frac{\sigma_t}{2})^2} \qquad (6\text{-}3)$$

وحيث أن :

$$\sigma_t = \frac{32M_b}{\pi.d^3} \qquad \tau = \frac{16.M_t}{\pi.d^3}$$

فبالتعويض يكون :

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi.d^3}\sqrt{M_t^2 + M_b^2} \qquad (7\text{-}3)$$

وبتحديد قيمة (τ_{max}) بالإجهاد المسموح به $[\tau]$ تصبح العلاقة كالتالي :

$$d^3 = \frac{16}{\pi[\tau]}\sqrt{M_t^2 + M_b^2} \qquad (8\text{-}3)$$

يدعى المقدار $(M_t^2 + M_b^2)$ بعزم الالتواء المكافئ Equivalent twisting moment، وتعرف بأنه عزم التواء التخيلي الذي يسبب أكبر إجهاد قص في العمود وفق التأثير المتحد لعزم الالتواء وللانحناء الفعلي.

المعادلة العامة للعمود المصمت (وفق المواصفات الأمريكية ASME) المعرض للالتواء والانحناء بتطبيق معادلة أكبر قص المعدلة بمعاملات الخط والتعب (k_t) و (k_b)(والتي تعتمد على ظروف العمل) وهي:

$$d^3 = \frac{16}{\pi.[\tau]}\sqrt{(k_t.M_t)^2 + (k_b.M_b)^2} \qquad (9\text{-}3)$$

وتدعى هذه المعادلة بمعادلة ASME أو ما يسمى ASME-code formula .

حيث:

K_t: معامل الخبط والتعب المطبق مع عزم الالتواء.

K_b: معامل الخبط والتعب المطبق مع عزم الانحناء.

والجدول التالي يعطي قيم كل من k_t و k_b :

نوع الحمولة	k_b	k_t
العمود الساكن: الحمولة مطبقة بالتدريج الحمولة تطبق فجأة	1 1,5-2	1 1,5-2
العمود الدائر:		
الحمولة الثابتة أو المطبقة تدريجياً	1,5	1
الحمولة المطبقة فجأة- صدمات خفيفة	1,5-2	1-1,5
الحمولة المطبقة فجأة- صدمات عنيفة	2-3	1,5-3

٤- الالتواء المصحوب بشد أو ضغط محوري:

Torsion combined with axial tension or compression

تستعرض بعض الأعمدة إلى التواء مع أحمال محورية مباشرة كما في أعمدة مراوح (الرفاصات) Propeller shafts.

الإجهاد المباشر وفق الحمل المحوري (P) يعطى من العلاقة:

$$\sigma = \frac{4P}{\pi.d^2} \qquad (10\text{-}3)$$

ويمكن دمج هذه الإجهادات باستخدام علاقة الإجهاد المتحد رقم (3-6) وذلك كالتالي:

$$\tau_{max} = \frac{16}{\pi.d^3}\sqrt{M_t^2 + (\frac{P.d}{8})^2} \qquad (11\text{-}3)$$

وتحل هذه المعادلة بالمحاولة By trail كالتالي: نعوض عن τ_{max} بإجهاد القص المسموح به، فإذا كان الحمل المحوري حمل ضغط فعندئذ يجب أن لايزداد هذا الحمل عن حمل التحدب الخطر (الحرج) Critical buckling load أو حمل الكسر،

يمكن أن تعدل هذه العلاقة لتحتوي على معاملات للخبط والتعب للإجهاد إذا لزم الأمر.

في حالـــة العمود المحوف المتأثر بالالتواء والانحناء والأحمال المحورية فنطبق المعادلة الاصطلاحية الأمريكية AsME code equation (معادلة أكبر قصر المعدلة- معاملات الخبط والتعب ومعامل العمود (Column-factor) وهو كالتالي:

$$d_o^3 = \frac{16}{\pi[\tau](1-k^4)}\sqrt{\left[k_b.M_b + \frac{\alpha P_a.d_o(1+k^2)}{8}\right] + (k_t.M_t)^2} \qquad (12\text{-}3)$$

حيث: $k = \frac{d_i}{d_o}$

d_o : القطر الخارجي للعمود.

d_i: القطر الداخلي للعمود.

P_a: الحمل المحوري.

$[\tau] = 560\ kg/cm^2$: إذا كان العمود دون مجرى للخوابير.

$[\tau] = 420\ kg/cm^2$: إذا كان العمود ذا مجرى للخابور.

تحدد المواصفات الأمريكية الإجهاد المسموح به للفولاذ كالتالي:

$[\tau] = 30\%$ من حـــد المـــرونة بحيث لا تزيد عن 18% من أكبر متانة في الشد للأعمدة التي لا تحوي مجاري للخوابير، وتنقص هذه القيمة بمقدار 25% عند وجود مجاري للخوابير.

α: معامل فعل العمود column action factor يساوي إلى :

في حالة الشد : $\alpha = 1$

في حالة الضغط:

$$\alpha = \frac{1}{1 - 0{,}0044(\frac{L}{r})} \quad \text{لأجل } \frac{L}{r} < 115$$

$$\alpha = \frac{\sigma_y}{\pi^2 . n . E}(\frac{L}{r})^2 \quad \text{لأجل } \frac{L}{r} > 115$$

حيث:

r: نصف ذراع القصور Radius of gyration ويساوي $\sqrt{\frac{\bar{I}}{A}}$

σ_y: إجهاد الخضوع في حالة الضغط.

n : معامل يعتمد على وضعية نهايات العمود ويساوي إلى :

n =1 إذا كانت النهاية مفصلية Hinged ends.

n = 2,25 إذا كانت النهايات مثبتة Fixed ends.

n =1,6 إذا كانت النهايات محصورة بشكل جزئي Party Restraired كما في حالة المحامل .

مثال محلول 1:

أوجد بدقة أقطار العمودين حسب العزوم والقوى المؤثرة في كل منهما وفق الجدول التالي:

M_t Kg.cm	M_b Kg.cm	Pa Kg	K_t	K_b	$[\tau]$ kg/cm^2	α	K=di/do
13000	4000	5000	1,4	1,2	270	1,3	العمود (١) 0,8
1000	300	500	1,5	1,3	240	1,3	العمود(٢) 065

الحل:

نطبق العلاقة

$$d_0^3 = \frac{16}{\pi[\tau](1-K^4)}\sqrt{(K_t + M_t)^2 + [K_b M_b + \frac{\alpha P a d_o (1+K^2)}{8}]^2}$$

العمود الأول :

نضع Pa=0 فيكون d_o=8,441 وهذا يعطي $\tau = 348kg/cm^2$

نقوم بعدة تجارب للوصول إلى أقرب قيمة لـــ τ المعطاة 270 kg/cm2 فنصل إلى أن القطر الخارجي d_o تقريباً $d_o \approx 9,3cm$.

العمود الثاني :

Pa=0 d_o=3,421 وهذا يعطي $\tau = 1246,6kg/cm^2$

وبعد عدة تجارب يكون $d_o \approx 7,6cm$.

II–تصميم أبعاد العمود على أساس الجسوء :

Design of shaft sizes on the basis of rigidity:

يجـــب تصميم الأعمدة بحيث تكون مقبولة من حيث الانحراف مهما كان نوعـــه (التوائـــياً أو جانبياً...). قد يكون العمود قوياً كفاية ولكن ربما لا يكون جسوءه مرضياً، لذا سندرس هذه الناحية ونعتبر نوعين من الجسوء.

١–الجسوءة الالتوائية Torsional rigidity:

نحـــن نعلـــن أن القوة المماسية (P_t) في حالة الالتواء تسبب تشكل زاوية تدعـــى بـــزاوية الالتواء (الانحراف الالتوائي Torsional deflection) يكون هذا الانحراف الالتوائي خطراً على عمود الإدارة عند ازدياد قيمته لأنه بسبب اهتزازات التوائـــيه Torsional vibrations قد تؤدي إلى انهيار العمود، لذا يجب اعتبار هذا الانحراف عند تصميم العمود بحيث يكون قطره كبيراً ليعطي جسوء مناسباً.

يمكن الحصول مباشرة على قطر العمود من العلاقة:

$$d = 12\sqrt[4]{\frac{HP}{N}} \qquad (13\text{-}3)$$

أو:

$$d = 0,732\sqrt[4]{M_t} \qquad (14\text{-}3)$$

حيث :

HP : القدرة المنقولة بالحصان. N (r.p.m) : عدد الدورات في الدقيقة.

M_t (kg.cm) : عزم الالتواء.

أمـــا زاوية الالتواء فتحدد بأن تكون (ربع درجة مثلاً) لكل متر من طول العمود وتعطى من العلاقة (بالاستعانة بالعلاقتين (1-3) و (2-3) من هذا البحث):

$$\theta = \frac{M_t.L}{G.I_p} \quad \text{radians (مقدرة بالراديان)} \qquad (15\text{-}3)$$

$$\theta = \frac{584M_t.L}{G.d^4} \quad \text{degree (مقدرة بالدرجة)} \qquad (16\text{-}3)$$

حيث :

L (cm) : طول العمود. G (kg/cm^2) : معامل المرونة للقص.

وتتعلق زاوية الالتواء المسموح بها على الغرض الذي صمم العمود من أجله، ويجب أن لا تـــزيد زاويـــة الالتواء في المثاقب (1^o) بطول (25-20) من قطر العمود، هذا المقدار لزاوية الالتواء قد يزداد قليلاً في الأعمدة المناولة الرئيسية.

٢- الجسوء الجانبي Lateral rigidity :

يمكن أن يصمم قطر العمود وفق الجسوء أو الانحراف الجانبي المسموح به، ويمكن من العلاقات الموجودة في الأشكال في نهاية الكتاب ، إيجاد انحراف العمود المـــتجانس. أما إذا كان المقطع متغيراً فيمكن حساب الانحراف أو الجسوء الجانبي من العلاقة الأساسية للمعادلة التفاضلية المعتمدة على محور الخمول:

$$\frac{M_b}{E.I} = \frac{d_y^2}{dx^2} \qquad (15\text{-}3)$$

وبمكاملـــة هـــذه المعادلة نحصل على قيمة الانحراف (y). إن هذه العملية ليست بالصعبة إذا كان عزم العطالة للعمود منتظماً وكان من الممكن التعبير تحليلياً عن توزيع عزم الانحناء على طول العمود.

مثال محلول 2:

أوجـــد قطر عمود ينقل استطاعة قدرها (2500 kw) عند (12,5 rad/s). إجهـــاد القـــص المسوح به ($60 \quad MN/m^2$). إذا استخدمنا (6) براغي لربط قارنة العمود . أحسب القطر المتوسط للبراغي لنفس إجهاد القص للعمود.

افـــترض أن $P.C.D=1,75 \times d$ للبرغي. حيث d: قطر العمود. ثم احسب قطـــر العمود إذا كان العمود لا يلتوي أكثر من درجة واحدة لطول (3m). اعتبر $G=80\times10^9 \ N/m^2$.

الحل :

١-الاستطاعة المنقولة :

$$= 2500 \ kw = 2500 \times 10^3 \quad N.m/s$$

العزم يكون

$$= \frac{P}{w} = \frac{2500\times10^3}{12,5} = 200\times10^3 \quad N.m$$

حساب قطر العمود (d) :

$$\frac{\pi}{16}\times d^3 \times 60\times10^6 = 200\times10^3$$

$$d = 0,257 \quad m$$

$$P.C.D = 1,75 \times 0,257 = 0,48 \quad m$$

حمل القص على كل برغي :

N : عدد البراغي :

$$= \frac{M_t}{n\times\frac{P.C.D}{2}} = \frac{200\times10^3}{6\times0,24} = 139\times10^3 \quad N$$

إذا كان d_1 قطر البرغي فيكون :

$$\frac{\pi}{4}\times d_1^{\,2}\times 60\times 10^6 = 139\times 10^3 \quad N$$

$$d_1 = 0{,}054 \ m \qquad d_1 = 54 \ mm$$

٢-

$$\frac{M}{I}=\frac{G\theta}{\ell} \qquad \theta=\frac{M\ell}{IG}$$

$$\frac{20\times 10^3}{\frac{\pi}{32}d^4}=\frac{80\times 10^9\frac{\pi}{180}}{3}$$

$$d^4 = 0{,}000438 \qquad d = 0{,}1446 \ m$$

تأثير مجرى الخابور Effect of keyways :

إن وجـــود مجـــرى للخابور يقلل من متانة أو مقدرة الحمل المحمول على العمود، لأن تركيز الإجهادات العالي يحدث على أو قرب زوايا مجاري الخابور.

يـــزداد تـــأثير وجود مجار للخوابير على الأعمدة عند وجود صدم وتعب بالأعمدة. ويمكن إيجاد تأثير هذه المجاري كالتالي:

$$\frac{\text{متانة العمود بوجود مجرى للخابور}}{\text{متانة العمود بدون وجود مجرى للخابور}} = 1-0{,}2\frac{w}{d}-1{,}1\frac{h}{d}$$

حيث :

w cm : عرض الخابور . h cm :عمق مجرى الخابور.

d cm : قطر العمود.

تنبيه:

ننصـــح الطالـــب بالعودة إلى الفصل الثالث عشر من هذا الكتاب حيث المسائل المحلولة وغير المحلولة لمواضيع هذا الفصل.